Version du 30 mars 2009

Introduction à l'atelier sur l'Analyse de données
Séries de Fourier et transformation de Fourier

Jean Roux

CERES-ERTI
École Normale Supérieure, Paris.

Avertissement : En référence au fameux tableau (de 1929) de R. Magritte "Ceci n'est pas une pipe", je dirais de ce syllabus sur les séries et la transformée de Fourier que "Ceci n'est pas de la science mathématique". En effet on ne peut pas avoir la prétention d'en faire la théorie en quelques pages, alors qu'il a fallu plus d'un siècle (avec l'expansion de l'analyse au XIX^e) pour éclaircir le développement d'une fonction en séries trigonométriques. Afin d'y voir clair, il faut avoir à notre disposition au moins les outils de l'intégrale de Riemann (1854) puis celle de Lebesgue (1902). La théorie des distributions de L. Schwartz (milieu du XX^e siècle) joue aussi un grand rôle dans la justification complète de la transformée de Fourier. C'est donc une gageure, dans un cours d'une heure et demie, d'enseigner le sujet à des auditeurs venant d'horizons très différents. Tout au plus peut-on sensibiliser ces auditeurs à des éléments de la théorie, en éclairant de façon fragmentaire, le plus correctement possible, le cadre d'application de ces techniques.

Table des matières

1 Avant-propos sur le traitement du signal

Le domaine d'application du traitement du signal est à la fois varié et étendu. On peut citer de façon non exhaustive l'analyse des signaux biomédicaux (électrocardiogramme, électroencéphalogramme, ...), l'analyse des images photographiées par satellites et des images mesurées en radiologie (scanner, résonance magnétique nucléaire). Un autre domaine important est celui de l'analyse d'un signal émis puis déformé par une cible ou un obstacle avant d'être mesuré par un capteur, dans l'espoir que l'étude du signal capturé donnera une information utile sur cet obstacle (la cible). C'est un problème inverse. Ceci est utile, par exemple, pour déceler des fissures éventuelles dans des matériels inaccessibles à l'expérience directe (cœurs irradiés de centrales nucléaires par exemple). On peut classer ce traitement du signal dans la rubrique du contrôle non destructif.

Traiter un signal, c'est extraire de l'information des mesures effectuées par un capteur afin d'atteindre un objectif qui peut aller de la compréhension du monde physique (biologie, météorologie, géologie, physique, chimie, etc...) à l'action sur ce monde (par exemple en robotique). Symboliquement le système de génération et de traitement du signal peut se représenter sous la forme suivante

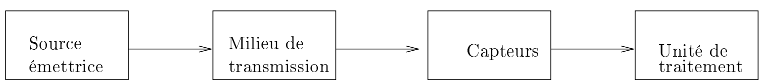

FIG. 1 – Schéma d'un système de génération et de traitement du signal.

Le milieu de transmission déforme les signaux émis. L'analyse et la compensation de ces déformations est sans doute un des problèmes centraux du traitement du signal. Mais aussi, le signal mesuré par les capteurs est, la plupart du temps, entaché d'un *bruit* de mesure qui n'est pas lié directement au phénomène étudié. On peut dire que le signal mesuré par un capteur n'est ni parfaitement prévisible ni parfaitement imprévisible (dans ce dernier cas il serait évidemment inutile de l'étudier !). Ces caractéristiques, perturbations et absence de parfaite prévisibilité, nécessitent l'emploi fréquent d'outils développés dans le cadre de la théorie des probabilités.

Notons aussi que de nombreuses méthodes de traitement des signaux ne sont validées ou justifiées que par des simulations sur des “cas d'école” abstraits : les signaux générés artificiellement présentent toutes les qualités requises et les méthodes proposées permettent d'atteindre les objectifs fixés. Pourtant, dès qu'on les confronte à des problèmes réels, les méthodes s'avèrent décevantes parce que les hypothèses retenues (souvent simplificatrices) pour la simulation ne correspondent pas toujours à la réalité des phénomènes mesurés.

Le traitement du signal, pour toutes ces raisons, est donc un problème difficile.

Cependant il existe des méthodes et/ou outils de “base”, au compte desquels on peut ranger, pour les signaux continus, les séries et la transformation de Fourier que nous allons partiellement examiner et pour lesquelles nous ne prétendons à aucune originalité. Ce cours ne présentera pas :

- la transformée de Fourier rapide (the Fast Fourier Transform (FFT)),
- la théorie de l'échantillonnage ; évidemment le traitement numérique du signal se fait avec des valeurs discrètes : il n'est pas possible de traiter sur ordinateur des signaux à temps continu. Cela pose les deux questions suivantes : 1) sur quel intervalle de temps travaille-t-on ? 2) Quelle quantité de valeurs mesurées prend-t-on ? Souvent, par souci de simplicité, on échantillonne le signal à des intervalles de temps homogènes (i.e. à des pas de temps égaux),
- l'étude des filtres numériques.

Chacun de ces items pourrait faire le sujet d'une leçon approfondie.

2 Représentation des signaux périodiques sous la forme de séries de Fourier

Il semble que ce soit Charles Fourier, dans son ouvrage sur la “Théorie analyique de la chaleur” en 1822, qui ait eu l'idée de développer une fonction en série de fonctions trigonométriques.

Soit f une fonction d'une variable. On appelle *période* d'une fonction périodique f tout nombre réel T tel que $f(x+T) = f(x)$. On vérifie immédiatement que :

- le nombre zéro est toujours une période,
- l'opposé d'une période de f, la somme de deux périodes de f, sont des périodes de f ;

Donc les périodes de f forment un sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}$ des nombres réels. De plus, c'est un sous-groupe *fermé* (au sens topologique) car toute limite T d'une suite de périodes T_j de f est encore une période. Or il n'y a que trois catégories de sous-groupes fermés de $\mathbb{R}$:

- le sous-groupe réduit à l'élément zéro, toute fonction n'ayant pas une période $T \neq 0$ f est dite non-périodique,
- le sous-groupe est $\mathbb{R}$ tout entier,
- l'ensemble des multiples lT_0 (l entier > 0, < 0 ou $= 0$) d'un nombre T_0 dit *période fondamentale* de f.

Une fonction vérifiant l'un des deux derniers cas est dite *périodique*.

Remarque 2.1. *Dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ (fonction de n variables) une période est un vecteur $\vec{T}$ tel que $f(\vec{x}+\vec{T}) = f(\vec{x})$.*

2.1 Exponentielles de période T. Série de Fourier.

Pour qu'une exponentielle $e^{\lambda x}$ ait la période $T > 0$ réelle il faut et il suffit que $e^{\lambda T} = 1$. En effet si on a $e^{\lambda(x+T)} = e^{\lambda x}$ cela implique $e^{\lambda T} = 1$, réciproquement si $e^{\lambda T} = 1$ alors $e^{\lambda(x+T)} = e^{\lambda x} e^{\lambda T} = e^{\lambda x}$. La condition $e^{\lambda T} = 1$ est équivalente à $\lambda T = 2ki\pi$. Si T est donnée, les valeurs de λ possibles sont $\lambda = ik\frac{2\pi}{T} = ik\omega$.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la *pulsation* associée à la période T.

Remarque 2.2. *Dans la plupart des ouvrages anglo-saxons on ne fait pas de différence entre pulsation et fréquence, qui représentent des données identiques avec des unités différentes : les radians par seconde pour ω et le nombre de périodes (ou de tours) par seconde pour la fréquence.*

Pour $k \neq 0$, on obtient une exponentielle de module égal au nombre 1 , dont la période fondamentale est $\frac{T}{|k|}$. En effet $e^{\lambda(\frac{T}{|k|}+x)} = e^{\lambda x} e^{\lambda \frac{T}{|k|}} = e^{\lambda x} e^{2i\pi} = e^{\lambda x}$.

La question fondamentale concernant les séries de Fourier est : f étant une fonction périodique admettant la période $T > 0$, est-elle développable en la série suivante, dite *série de Fourier* ?

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x} \quad \text{où } \omega = \frac{2\pi}{T}; \tag{2.1}$$

chaque terme de la série étant, à un facteur près, l'une des exponentielles ayant la période T (en effet $e^{ik\frac{2\pi}{T}(x+T)} = e^{2ki\pi\frac{x}{T}} e^{2i\pi k} = e^{2ki\pi\frac{x}{T}}$). Le coefficient de Fourier c_k est l'amplitude de l'harmonique k^e du signal.

Parfois on groupe deux à deux les valeurs opposées de k et on remplace la série d'exponentielles par la série trigonomètrique suivante

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega)\right), \tag{2.2}$$

où a_k, b_k et $c_k \in \mathbb{C}$. Un calcul d'identification élémentaire montre que

$$\left| \begin{array}{lcl} a_0 & = & c_0 \\ a_k & = & c_k + c_{-k} \\ b_k & = & i(c_k - c_{-k} \end{array} \right. \quad \textit{ou bien} \quad \left| \begin{array}{lcl} c_0 & = & a_0 \\ c_k & = & \frac{a_k - ib_k}{2} \\ c_{-k} & = & \frac{a_k + ib_k}{2} \end{array} \right. . \tag{2.3}$$

D'où les questions que l'on peut se poser (que l'on doit !) sur les séries de Fourier :

- La fonction f peut-elle être arbitraire ? Par exemple que peut-on affirmer si f est continue ?
- Pour quelles fonctions f les coefficients de Fourier sont-ils calculables ?
- Les séries de Fourier convergent-elles ? Si oui, est-ce vers f et en quel sens ?

2.2 Calcul des coefficients c_k de la série de Fourier (2.1)

Supposons la série de Fourier uniformément convergente, ce qui implique que f est continue puisque chaque terme de la série est continue en x. On peut alors, grâce à un théorème de l'analyse, faire une intégration terme à terme de la série (2.1) et calculer

$$\mathcal{C}_k(f) = \int_a^{a+T} \frac{f(x)e^{-ik\omega x}}{T} dx = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l \int_a^{a+T} \frac{e^{i(l-k)\omega x}}{T} dx, \tag{2.4}$$

où f est donnée sur un intervalle-période $(a, a+T)$. Montrons d'abord que cette intégrale est indépendante du choix de cet intervalle-période, c'est-à-dire de a. Considérons un autre intervalle-période $(b, b+T)$ avec $b \neq a$. On peut écrire symboliquement $\int_a^{b+T} = \int_a^b = \int_b^{b+T}$ ou $\int_a^{b+T} = \int_a^{a+T} + \int_{a+T}^{b+T}$; on a en égalant les deux seconds membres

$$\int_b^{b+T} = \int_a^{a+T} + \left(\int_{a+T}^{b+T} - \int_a^b \right). \tag{2.5}$$

La fonction $g(x) = f(x)e^{-ikwx}$ est périodique de période T (f est T-périodique par hypothèse et on a déjà remarqué que c'est vrai pour l'exponentielle). Par le changement de variable $x = \xi + T$, on a donc

$$\int_{a+T}^{b+T} g(x)dx = \int_a^b g(\xi + T)d\xi = \int_a^b g(\xi)d\xi,$$

en tenant compte de (2.5) on a ainsi

$$\int_b^{b+T} f(x)e^{-ikwx}dx = \int_a^{a+T} f(x)e^{-ikwx}dx, \tag{2.6}$$

ce qui démontre notre assertion qui est indispensable pour affirmer (heureusement) que le calcul des c_k est indépendant de l'intervalle-période choisi : leur évaluation ne dépend que de f. Reprenons le calcul de $\mathcal{C}_k(f)$. Il s'agit, voir le dernier membre de (2.4), de calculer essentiellement $\int_a^{a+T} \frac{e^{imwx}}{T} dx$, avec $m = l - k$. Compte tenu de la T-périodicité de l'exponentielle puisque $e^{im\omega T} = 1$ si $\omega = 2\pi/T$, on a

$$\int_a^{a+T} \frac{e^{im\omega x}}{T} dx = \begin{cases} \frac{1}{T} \frac{e^{im\omega x}}{im\omega}\Big|_a^{a+T} = 0 \;\; si \;\; m \neq 0 \\ 1 \;\; si \;\; m = 0 \end{cases}. \tag{2.7}$$

Finalement il ne reste dans la somme représentant la série de Fourier de f que le terme en $l = k$ (c'est-à-dire le terme en $m = 0$) tous les autres termes étant nuls. Par la formule (2.4) on a donc $\mathcal{C}_k(f) = c_k$.

Remarque 2.3. *Soit f est une fonction périodique "pure" du type $f(x) = ce^{i\omega x}$, mais non identifiée comme telle. On cherche naïvement son développement en série de Fourier. Le calcul élémentaire précédent montre que le seul terme non nul de la série sera c_1. Ce qui identifie évidemment la fonction f par $c_1 e^{i\omega x}$. Les fonctions périodiques sont ainsi heureusement (!) bien identifiées par leurs séries de Fourier!*

Ainsi si la fonction f est continue et si cette fonction possède un développement de Fourier uniformément convergent alors ce développement est entièrement connu avec

$$c_k = \mathcal{C}_k(f) = \int_a^{a+T} \frac{f(x)e^{-ik\omega x}}{T} dx. \tag{2.8}$$

Les quantités c_k sont toujours définies, même si f n'est pas continue, pourvu que f soit *localement sommable* (c'est-à-dire sommable sur tout intervalle fini ou, en raison de sa périodicité, sommable sur tout intervalle-période).

Les c_k sont les *coefficients de Fourier* de f. Ils ne varient pas si l'on modifie f sur un ensemble de mesure nulle (parce que l'on travaille avec l'intégrale de Lebesgue). On peut donc supposer f définie seulement presque partout (i.e. partout sauf sur un ensemble de mesure nulle).

On peut donner les coefficients dans le cas d'un développement de Fourier en série de cosinus et de sinus. Tenu compte de (2.3) et (2.8), on a les formules suivantes

$$a_0 = c_0 = \int_a^{a+T} \frac{f(x)}{T} dx.$$

et, pour $k > 0$

$$\left| \begin{array}{lcl} a_k & = & c_k + c_{-k} = 2\int_a^{a+T} \frac{f(x)\cos(k\omega x)}{T} dx \\ b_k & = & i(c_k - c_{-k}) = 2\int_a^{a+T} \frac{f(x)\sin(k\omega x)}{T} dx \end{array} \right. \tag{2.9}$$

Remarque 2.4. *Si f est paire $(f(x) = f(-x))$ ou impaire $(f(-x) = -f(-x))$ on a avantage à utiliser les formules trigonomètriques. En effet, en intégrant sur l'intervalle symétrique par rapport à l'origine $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ (l'intervalle-période précédent avec $a = -\frac{T}{2}$), si f est paire alors $b_k = 0$ pour tout $k > 0$ car la fonction $f(x)\sin(k\omega x)$ est impaire ; donc dans le cas où f est paire seuls les coefficients a_0 et a_k pour $k > 0$ sont non nuls.*

Dans le cas où f est impaire, toujours en travaillant dans le même intervalle, on constate que $a_k = 0$ pour $k \geq 0$.

Dans les deux cas on a deux fois moins d'intégrales à calculer.

Remarque 2.5. *i) Les coefficients de Fourier font intervenir les valeurs de f sur tout intervalle-période contrairement aux coefficients du développement du Taylor qui ne font intervenir que les valeurs de f (et de ses dérivées) au voisinage du point où l'on effectue le développement.*

ii) Soit une fonction f donnée sur un intervalle (a, b). On appelle développement de Fourier de f dans l'intervalle (a, b), le développement de Fourier de la fonction périodique $\tilde{f}$, de période $T = b - a$, coïncidant avec f sur l'intervalle (a, b). Observons que si $f(a) \neq f(b)$ et si f est continue en a et b (à droite en a, à gauche en b), alors f est nécessairement discontinue en a et b.

iii) Remarquons enfin que l'on a toujours les majorations

$$|c_k| \leq \int_a^{a+T} \frac{|f(x)|}{T} dx = \frac{1}{T} \|f\|_1 \leq \sup |f(x)|.$$

2.3 Convergence des séries de Fourier au sens des fonctions

Il existe une théorie de la convergence de ces séries en théorie des distributions, c'est tout à fait hors sujet. Même pour les fonctions, les résultats ne sont pas triviaux. Nous allons seulement préciser quelques difficultés et mentionner, sans démonstration, un résultat de convergence.

La question essentielle est la suivante : Une fonction f est-elle égale à la somme d'une série trigonomètrique ? L'examen des fonctions $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}$ et $sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega))$ donne aisément, comme nous l'avons vu, la forme des coefficients de ces séries, ce sont les coefficients de Fourier. Mais pouvoir les calculer, pour une fonction f donnée, ne signifie pas que que la série (ainsi obtenue) converge vers f et, si oui, en quel sens ? Par exemple si l'on suppose seulement que f est localement sommable, on peut évidemment calculer les c_k mais il n'y a pas lieu d'espérer que la série de Fourier $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}$ converge en tout point vers $f(x)$ puisqu'une modification de f sur un ensemble de mesure nulle ne change pas les coefficients de Fourier. Tout au plus peut-on s'attendre à une convergence *presque partout* (c'est-à-dire pour presque toutes les valeurs de x) ou en moyenne (c'est-à-dire dans l'espace des classes de fonctions f intégrables sur l'intervalle $(a, a + T)$). En fait il n'en est rien. Supposons une hypothèse plus forte, à savoir f continue. Alors on serait "en droit" d'espérer une convergence en tout point, mais il n'en est encore rien ; il existe des fonctions continues (évidemment les c_k sont calculables) qui ne sont pas sommes de leur série de Fourier. Donnons cependant (sans démonstration) un résultat de convergence

Théorème 2.1. *Si la fonction f est deux fois continûment dérivable (de classe C^2 comme on dit), sa série de Fourier converge absolument et uniformément vers f.*

Exemple On a le développement en série de Fourier suivant

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos(nx) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi}{n} \sin(nx), \quad sur \quad]0, 2\pi[. \tag{2.10}$$

La fonction x^2 est évidemment de classe C^2 (elle est même infiniment régulière) et donc l'égalité dans (2.10) est licite. Observons aussi que la fonction x^2 n'a rien de périodique et il est donc indispensable de noter que (2.10) n'est vraie que sur l'intervalle $]0, 2\pi[$ (c'est en fait le développement en série de Fourier de la fonction x^2 "périodicisée" de période 2π, voir l'item *ii*) de la remarque 2.5).

Ce n'est pas le seul théorème de convergence possible, par exemple il existe un théorème de convergence en moyenne quadratique qui affirme que si $f \in L^2(T)$ ($L^2(T)$ est l'espace des fonctions de carré sommable sur l'intervalle $(a, a+T)$) alors la série de ses coefficients de Fourier $c_k(f)$ correspondants est de carré sommable et

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx, \tag{2.11}$$

qui est l'égalité de *Bessel-Parseval*.

De plus on a la convergence en moyenne quadratique de la série de Fourier vers f qui s'exprime par :

$$\lim_{\substack{M\to\infty \\ N\to\infty}} \int_a^{a+T} \left| \left(\sum_{k=-M}^{+N} c_k(f) e^{ik\omega x} \right) - f(x) \right|^2 \frac{dx}{T} = 0. \tag{2.12}$$

3 Transformation de Fourier

3.1 Introduction

Esssentiellement nous allons présenter la transformation de Fourier d'une variable. Elle concerne les fonctions f *non périodiques*. Notons par $f_T(x)$ la fonction égale à $f(x)$ sur l'intervalle $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ et prolongée en dehors de cet intervalle de façon à être périodique de période T sur $\mathbb{R}$. Pour $T \to \infty$, $f_T \to f$ uniformément sur tout intervalle fini. Comme f_T est périodique de période T, f_T admet un développement en série de Fourier

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_T(x) & = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,T} e^{ni\omega x}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \\ \text{avec} & & \\ c_{n,T} & = & \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-ni\omega x} dx \end{array} \right. , \tag{3.1}$$

en choisissant de calculer les coefficients de Fourier $c_{n,T}$ sur l'intervalle $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ où $f_T(x) = f(x)$.

Le développement en série de Fourier est assez naturel, mais la transformation de Fourier l'est un peu moins. Considérons un intervalle $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$. Les valeurs de n pour lesquelles pour lesquelles $2\pi\lambda \leq n\omega \leq 2\pi(\lambda + \Delta\lambda)$ sont en nombre $2\pi\frac{\Delta\lambda}{\omega}$ (avec une erreur inférieure ou égale à 2 si zéro, une ou les deux bornes de l'intervalle sont incluses). Le paquet de termes correspondant

$\sum_{2\pi\lambda \leq n\omega \leq 2\pi(\lambda+\Delta\lambda)} e^{ni\omega x}$ peut approximativement s'écrire (en supposant que chacun des $2\pi\frac{\Delta\lambda}{\omega}$ termes de cette somme est peu différent du premier terme), $c_\lambda 2\pi\frac{\Delta\lambda}{\omega} c_{n,T} e^{2i\pi\lambda x}$ ou, par définition de ω, $c_\lambda T \Delta\lambda e^{2i\pi\lambda x}$, avec

$$c_\lambda = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-2i\pi\lambda x}dx.$$

Si $C(\lambda) = Tc_\lambda$, le paquet de termes s'écrit donc

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,T} e^{ni\omega x} \approx C(\lambda)\Delta\lambda e^{2i\pi\lambda x}, \\ avec \\ C(\lambda) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-2i\pi\lambda x}dx. \end{cases} \tag{3.2}$$

Pour $T \to \infty$, on peut remplacer $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$ par $\int_{-\infty}^{\infty}$. par ailleurs la somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ peut s'écrire comme la somme de tous les paquets correspondants aux intervalles $(0, \Delta\lambda), (\Delta\lambda, 2\Delta\lambda), \cdots, (k\Delta\lambda, (k+1)\Delta\lambda), \cdots, (-\Delta\lambda, 0),$ $(-2\Delta\lambda, -\Delta\lambda), \cdots, (-(k+1)\Delta\lambda, -k\Delta\lambda), \cdots$, d'épaisseur $\Delta\lambda$ qui s'écrivent sous la forme (3.2). On arrive ainsi intuitivement à la formule (l'intégrale apparaissant comme une intégrale de Riemann de pas $\Delta\lambda$ de la fonction $C(\lambda)e^{2i\pi\lambda x}$ (voir (3.2)))

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)e^{2i\pi\lambda x}dx, \tag{3.3}$$

avec

$$C(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2i\pi\lambda x}dx. \tag{3.4}$$

La série de Fourier est remplacée par l'intégrale de Fourier (3.3), le coefficient de Fourier associé étant donné par (3.4).

Cela n'a rien d'une démonstration, c'est fait uniquement pour faire le lien entre la série de Fourier et la transformation de Fourier. Ainsi la définition de la transformée de Fourier pourra sembler plus "naturelle".

3.2 Définition de la transformation de Fourier

La fonction f étant une fonction à valeurs complexes de la variable réelle x, on appelle image de Fourier ou transformée de Fourier de f la fonction à valeurs complexes $C(\lambda)$ de la variable réelle λ définie par

$$C(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x} f(x)dx. \tag{3.5}$$

Notons qu'en particulier $C(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

On écrit aussi

i) $C = \mathcal{F}f$, à savoir $C(\lambda) = \mathcal{F}(f(x))$,
ii) $C = \hat{f}$.

Mentionnons qu'il existe une autre écriture de la transformée de Fourier. Pour $f \in L^1$, on pose pour ω réel, $\omega \neq 0$ et $h > 0$

$$D(\lambda) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\lambda x} f(x)dx.$$

On vérifie que $D(\lambda) = \frac{1}{h} C(\frac{\omega}{2\pi}\lambda)$, C étant la transformée précédente.

Dans le cadre du traitement du signal le rôle de la variable x est souvent joué par la fréquence ξ.

À côté de la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ on définit la transformation :
$C_1 = \overline{\mathcal{F}}f$ avec $C_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\lambda x} f(x)dx$.

A priori C_1 n'a rien à voir avec C, c'est la raison pour laquelle nous prenons la précaution d'écrire plus haut l'expression “à côté”.

Les applications $C = \mathcal{F}f$ et $C_1 = \overline{\mathcal{F}}f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ existent évidemment si f est sommable ($f \in L^1$) et dans ce cas ce sont des *fonctions continues de* λ. (La fonction $e^{\pm 2i\pi\lambda x} f(x)$ est continue en λ pour tout x fixé et elle est majorée par la fonction sommable (par hypothèse) $|f(x)|$, elle est donc continue d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.) De plus ces fonctions sont *bornées* car

$$|C(\lambda)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \|f\|_{L^1},$$

de même on a $|C_1(\lambda)| \leq \|f\|_{L^1}$.

On démontre aussi (autre théorème dû à Lebesgue) que $C(\lambda) \to 0$ pour $\lambda \to \pm\infty$.

Remarque 3.1. *(importante)* $\mathcal{F}[\cos(x)](\lambda)$ *n'existe pas car* $\cos(x)$ *n'est pas* L^1. *On ne peut donc pas étudier les fonctions périodiques par la transformation de Fourier (TF). Alors pour pouvoir utiliser la TF il y a deux voies :*

1) *Limiter les fonctions périodiques à un intervalle borné* $[-A, A]$ *en les prenant nulles en-dehors. C'est-à-dire que l'on définit la transformée de Fourier de la fonction tronquée à [-A, A] par :*

$$\int_{-A}^{A} e^{-2i\pi\lambda x} f(x)dx. \tag{3.6}$$

Notons que dans les applications concrètes un signal n'est jamais éternellement périodique.

2) *Généraliser la notion de fonction avec les distributions et définir la TF des distributions.*

L'examen de la voie 2) ne sera pas évoqué, bien qu'un résultat de la TF des distributions sera utilisé dans la section suivante.

Remarque 3.2. *À la formule (3.4) est associée la formule (3.3), mais (3.3) n'a pas nécessairement un sens car si $f \in L^1$, $C(\lambda)$ est bornée mais non nécessairement sommable, de sorte que (3.3) n'aura pas de sens au sens classique des fonctions. Mais comme fonction bornée $C(\lambda)$ a un sens comme distribution tempérée (pour les afficionados !) qui admet une image par $\overline{\mathcal{F}}f$. On peut alors démontrer rigoureusement, dans le cadre de la théorie des distributions, la formule de réciprocité du paragraphe suivant.*

Définissons maintenant une quantité classique du traitement du signal

Définition 3.1. *La densité spectrale de puissance (DSP) (ou Power Spectral Density ou PSD en anglais) est le carré du module de la transformée de Fourier. Ainsi, si f est un signal et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier, la densité spectrale de puissance est définie par la fonction réelle positive $\xi \to S_f(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2 = \hat{f}(\xi)\overline{\hat{f}}(\xi)$.*

3.3 Formule de réciprocité entre $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}f$

Soit f une fonction sommable d'une variable. Par définition on peut écrire $\overline{\mathcal{F}}[C](x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\lambda x} C(\lambda) d\lambda$, soit

$$\overline{\mathcal{F}}[C](x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\lambda x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-2i\pi\lambda\xi} d\xi \right) d\lambda.$$

On peut intervertir les deux intégrales à condition, théorème de Fubini, que l'intégrale double en (ξ, λ) soit sommable. Or ce n'est jamais le cas car on a $|e^{2i\pi\lambda x} f(\xi) e^{-2i\pi\lambda\xi}| = |f(\xi)|$ et donc puisque $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi$ est une constante finie bien déterminée,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi) d\lambda d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi) d\xi \right) = \infty.$$

On ne peut donc pas intervertir les deux signes de sommation. Mais faisons-le formellement, il vient

$$\overline{\mathcal{F}}[C](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda(\xi - x)} d\lambda \right) d\xi. \tag{3.7}$$

Mais, par un résultat (facile) de la TF des distributions, on a $\mathcal{F}[1] = \delta$ où δ est la distribution de Dirac. Cette dernière formule s'écrit (incorrectement) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x} d\lambda = \delta(x)$, et donc (3.7) devient

$$\overline{\mathcal{F}}[C](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(\xi - x) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x - \xi) d\xi = f(x).$$

La dernière égalité provient du fait que la distribution δ est l'élément neutre pour le produit de convolution ($\delta \star f = f$).

On a donc $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}[f] = f$ soit $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$, c'est la formule de réciprocité.

Dans le cadre des fonctions, ceci n'est pas une démonstration de la formule de réciprocité ; par exemple nous avons fait un usage non justifié du théorème de Fubini. On répète qu'une démonstration rigoureuse ne peut se faire que dans le cadre de la théorie des distributions.

3.4 Formules fondamentales et majorations

Supposons $f \in L^1$, f continue et dérivable avec $\underline{f' \in L^1}$. Intégrons par parties, pour $\lambda \neq 0$, l'intégrale $\int_{-A}^{A} e^{-2i\pi\lambda x} f(x)dx$. Il vient, si f est sommable en la variable ξ

$$\int_{-A}^{A} e^{-2i\pi\lambda x} f(x)dx = \left[\frac{e^{-2i\pi\lambda x} f(x)}{-2i\pi\lambda}\right]_{x=-A}^{x=A} - \int_{-A}^{A} \frac{e^{-2i\pi\lambda x}}{-2i\pi\lambda} f'(x)dx. \qquad (3.8)$$

Faisons tendre A vers $+\infty$. Le terme entre crochets tend vers zéro. Montrons en effet que $f(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$; on a

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt.$$

Comme f' est sommable par hypothèse, $f(x)$ a bien une limite finie lorsque $x \to \pm\infty$ à savoir

$$f(\pm\infty) = f(0) + \int_0^{\pm\infty} f'(t)dt;$$

mais cette limite ne peut être $\neq 0$ sinon f ne serait pas sommable. Ce qui conclut.

Dans (3.8), le terme intégral du second membre a pour limite l'intégrale puisque f' est sommable. Au total, pour $\lambda \neq 0$ on a donc

$$C(\lambda) = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} e^{-2i\pi\lambda x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\lambda x}}{2i\pi\lambda} f'(x)dx,$$

ou encore

$$(2i\pi\lambda)C(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x} f'(x)dx = \mathcal{F}f'. \qquad (3.9)$$

Remarquons que cette formule est encore valable, par continuité, pour $\lambda = 0$ car les deux membres sont alors nuls : le premier parce qu'il contient λ, le second parce qu'il vaut alors $\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)dx = f(\infty) - f(-\infty) = 0$.

on déduit de cette formule l'importante majoration suivante :

$$|2\pi\lambda||C(\lambda)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|dx = \|f'\|_{L^1}.$$

Plus généralement, si f est m fois continûment différentiable et si les dérivées d'ordre $\leq m$ sont sommables on a

$$(2i\pi\lambda)^m C(\lambda) = \mathcal{F}f^{(m)},$$

et

$$|2\pi\lambda|^m |C(\lambda)| \leq \|f^{(m)}\|_{L^1}. \tag{3.10}$$

On a naturellement les mêmes formules avec l'opérateur $\overline{\mathcal{F}}$ à condition de remplacer $2i\pi\lambda$ par $-2i\pi\lambda$.

Cherchons maintenant si $C(\lambda)$ est dérivable. Formellement on a :

$$C'(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (-2i\pi x) e^{-2i\pi\lambda x} f(x) dx$$

soit $|C'(\lambda)| \leq \|2\pi x f(x)\|_{L^1}$. Cette dérivation sous le signe intégral est légitime si l'expression ainsi obtenue est une intégrale convergente, uniformément par rapport à λ lorsque λ parcourt un intervalle fini. C'est le cas si la fonction $\underline{xf(x) \text{ est sommable}}$. On a alors

$$C'(\lambda) = \mathcal{F}[-2i\pi x f(x)].$$

Plus généralement, si la fonction $x^m f(x)$ est aussi sommable, alors $C(\lambda)$ est m fois continûment différentiable et l'on a :

$$C^{(m)}(\lambda) = \mathcal{F}[(-2i\pi x)^m f(x)]$$

soit

$$|C^{(m)}(\lambda)| \leq \|(2\pi x)^m f(x)\|_{L^1} \tag{3.11}$$

En clair, plus f est dérivable (avec des dérivées sommables) plus $C(\lambda)$ est décroissante à l'infini (c'est la traduction de (3.10)) ; plus f est décroissante à l'infini (c'est-à-dire décroît plus vite que toute puissance de x) plus $C(\lambda)$ est dérivable avec des dérivées bornées (c'est la traduction de (3.11)). Les mêmes résultats sont valables pour $\overline{\mathcal{F}}$ à condition de remplacer $2i\pi x$ par $-2i\pi x$.

Remarque 3.3. *Il est donc pertinent d'introduire maintenant l'espace $\mathcal{S}$ de L. Schwartz, espace des fonctions complexes sur $\mathbb{R}$, indéfiniment différentiables, décroissantes, ainsi que chacune de leurs dérivées, plus rapidement que toute puissance de $\frac{1}{|x|}$ quand $|x| \to \infty$. Nous définissons cet espace car on le rencontre fréquemment dans des cours plus avancés.*

Nous allons résumer les résultats précédents dans une proposition ;

Proposition 3.1. *Toute fonction f sommable admet une transformée de Fourier $\mathcal{F} = C$ avec*

$$C(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x} f(x) dx$$

continue, bornée, tendant vers zéro pour $|\lambda| \to \infty$, telle que

$$|C(\lambda)| \leq \|f\|_{L^1}.$$

Si f est m fois continûment différentiable et si les dérivées d'ordre $\leq m$ sont sommables on a

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{F}[f^{(m)}] = (2i\pi\lambda)^m C(\lambda) \\ |2\pi\lambda|^m |C(\lambda)| \leq \|f^{(m)}\|_{L^1} \end{array} \right. \tag{3.12}$$

Si la fonction $x^m f(x)$ est aussi sommable, alors $C(\lambda)$ est m fois continûment différentiable et l'on a :

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{F}[(-2i\pi x)^m f(x)] = C^{(m)}(\lambda) \\ |C^{(m)}(\lambda)| \leq \|(2\pi x)^m f(x)\|_{L^1} \end{array} \right. \tag{3.13}$$

Soit toujours $C(\lambda) = \mathcal{F}[f(x)]$, une autre formule importante est donnée par :

$$\frac{1}{|k|} C(\frac{\lambda}{k}) = \mathcal{F}[f(kx)], \tag{3.14}$$

pour k réel $\neq 0$. En effet par le changement de variable $kx = \xi$ il vient

$$\mathcal{F}[f(kx)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x} f(kx) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda \frac{\xi}{k}} f(\xi) \frac{d\xi}{|k|} = \frac{1}{|k|} C(\frac{\lambda}{k}).$$

On a en particulier $C(-\lambda) = \mathcal{F}[f(-x)]$ et, par suite, si f est f est paire ou impaire, il en est de même pour C.

Le calcul de la transformée de Fourier d'une fonction f fait souvent appel à la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe. Par exemple, c'est le cas pour $f(x) = e^{-\pi x^2}$; on démontre que $\mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](\lambda) = e^{-\pi\lambda^2}$. Par la formule (3.14) on en déduit que

$$\mathcal{F}[e^{-kx^2}](\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{\pi^2}{k}\lambda^2}.$$

Donnons un exemple de calcul où la théorie de la variable complexe n'est pas nécessaire.

Exemple de calcul d'une transformée de Fourier. Soit

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \textit{pour} & |x| \leq A \\ 0 & \textit{pour} & |x| > A \end{array} \right. , \tag{3.15}$$

On reconnait une fonction "créneau" centrée à l'origine. Sa transformée de Fourier est

$$C(\lambda) = \int_{-A}^{A} e^{-2i\pi\lambda x} dx = \int_{-A}^{A} (\cos(2\pi\lambda x) - i \sin((2\pi\lambda x)) dx.$$

L'intégrale du sinus est nulle (intégration d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique). Par raison de parité on a $\int_{-A}^{A}\cos(2\pi\lambda x)dx = 2\int_0^A\cos(2\pi\lambda x)dx = \frac{\sin 2\pi\lambda A}{\pi\lambda}$. On a donc

$$C(\lambda) = \frac{\sin 2\pi\lambda A}{\pi\lambda}.$$

Observons que bien que f ne soit pas continûment différentiable (discontinuitées de la dérivée en $x = A$ et $x = -A$) ni même continue (mais elle est sommable !) la fonction $|\lambda C(\lambda)|$ est bornée : les conditions de la proposition (3.1) sont "seulement" suffisantes. Mais, par ailleurs, la fonction $|\lambda^2 C(\lambda)|$ n'est pas bornée .

3.5 Convolution et transformée de Fourier

Rappelons la convolution de deux fonctions f et g, elle est définie par :

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

Cet opérateur est essentiel dans le traitement du signal. En fait, dans cette discipline, on définit la fonction d'*autocorrelation* temporelle d'un signal f à temps continu, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, par

$$R_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f(x-\tau)}dx. \tag{3.16}$$

où $\bar{f}$ est le complexe conjugué de f. En introduisant la notation $f^s(x) = \overline{f(-x)}$, on vérifie que $R_f(\tau) = (f \star f^s)(\tau)$.

Soient f et g deux fonctions sommables alors la fonction h définie par $h(x) = (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$ est définie pour presque tout x et, en utilisant Fubini

$$\|h\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |(f\star g)(x)|dx = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|dx\right) dt \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1},$$

donc si $f, g \in L^1$, $f \star g \in L^1$.

Comme $f \star g$ est sommable on peut définir sa transformée de Fourier, soit

$$\mathcal{F}[(f \star g)(x)](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (f \star g)(x)e^{-2i\pi\lambda x}dx, \tag{3.17}$$

ou encore

$$\mathcal{F}[(f \star g)(x)](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt\right) e^{-2i\pi\lambda x}dx. \tag{3.18}$$

Par une astuce d'écriture évidente on peut écrire

$$\mathcal{F}[(f \star g)(x)](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \right) e^{-2i\pi\lambda(x-t)} e^{-2i\pi\lambda t} dx, \quad (3.19)$$

et, par Fubini

$$\mathcal{F}[(f \star g)(x)](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{-2i\pi\lambda(x-t)} dx \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2i\pi\lambda t} dt \right) \quad (3.20)$$

ou encore

$$\mathcal{F}[(f \star g)](\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda)\mathcal{F}[g](\lambda). \quad (3.21)$$

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions sommables est le produit des transformées de Fourier. On peut alors exhiber une relation entre la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrelation (3.16) et la densité spectrale de puissance S_f (appelée encore *spectre* du signal) de la définition 3.1. En effet, d'après (3.21), en reprenant la notation f^s du début du paragraphe, on a :

$$\mathcal{F}[R_f](\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda) \cdot \mathcal{F}[f^s](\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda) \cdot \overline{\mathcal{F}[f]}(\lambda) = S_f(\lambda). \quad (3.22)$$

Il suffit pour s'en convaincre de vérifier que

$$\mathcal{F}[f^s](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f^s(x) e^{-2i\pi\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(-x) e^{-2i\pi\lambda x} dx$$

soit

$$\mathcal{F}[f^s](\lambda) = -\int_{+\infty}^{-\infty} \bar{f}(x) e^{2i\pi\lambda x} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi\lambda x} dx}.$$

D'où finalement

$$\mathcal{F}[f^s](\lambda) = \overline{\mathcal{F}[f]}(\lambda).$$

Ce qui démontre la relation (3.22).

La relation (3.22) s'énonce ainsi : le spectre d'un signal est la transformée de Fourier du signal autocorrelé.

On peut aussi se poser le problème suivant (d'un certain point de vue symétrique du premier) : étant donné un produit de fonctions, quelle est sa transformée de Fourier ? Soit $y(t) = f(t)g(t)$, et sa transformée de Fourier

$$\mathcal{F}[y](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) e^{-2i\pi\omega t} dt. \quad (3.23)$$

Formellement (rappellons que l'opérateur $\overline{\mathcal{F}}$ ne peut pas s'appliquer sur $\mathcal{F}[f]$ au sens classique des fonctions) on a $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}[f] = f$, soit

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F})(\lambda) e^{-2i\pi\lambda t} d\lambda.$$

Portons cette expression dans (3.23), il vient :

$$\mathcal{F}[y](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\lambda) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2i\pi(\omega-\lambda)t} dt \right) d\lambda,$$

et, finalement

$$\mathcal{F}[y](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\lambda) \mathcal{F}[g](\omega - \lambda) d\lambda = (\mathcal{F}[f] \star \mathcal{F}[g])(\omega). \tag{3.24}$$

La transformée de Fourier d'un produit de fonctions est le produit de convolution des transformées de Fourier des fonctions. □

Last but not the least il existe une théorie de la transformée de Fourier dans L^2 avec la formule remarquable de Plancherel-Parseval, que nous mentionnons simplement pour attiser l'intérêt du lecteur.